

Transkript des Unterrichtsvideos im Modul

Feedback

Beweisen & Argumentieren

Der Satz des Pythagoras

Szene 1: Wiederholung zum Satz des Pythagoras

00:05: Lehrerin: So ... wir haben ja in der letzten Stunde mit dem Satz des Pythagoras begonnen.

00:11: Emily, ich darf doch mal dein Heft nehmen, oder? Emily: ...ja klar

00:14: Lehrerin: Wir haben noch den Hefteintrag von letzter Stunde, seht ihr den? Habt ihr den alle?

00:20: Sehr gut. Dankeschön.

00:24: Bevor wir jetzt heute einen Schritt weitermachen, möchte ich mit euch gerne noch einmal das Wichtigste von letzter Stunde wiederholen.

00:31: Mhmm...Emily, in welchen Figuren gilt denn der Satz des Pythagoras?

00:37: Emily: Der gilt nur bei rechtwinkligen Dreiecken.

00:39: Lehrerin: Ja, richtig. Das ist schon mal sehr wichtig. Sozusagen die Voraussetzung für den Satz des Pythagoras.

00:47: Hmm... Was denn noch? Ben, was fällt dir noch ein?

00:53: Ben: Öh... c^2 kann man ... durch die Flächen der anderen beiden Quadrate berechnen.

01:02: Lehrerin: Aha. Ähm Lena?

01:04: Lena: Die Summe der Flächen der beiden kleineren Quadrate ist genauso groß wie die Fläche des größten Quadrates, also zum Beispiel 9 plus 16 ist gleich 25 bei der einen Figur in der letzten Stunde.

01:19: Lehrerin: Ja, sehr gut Lena.

01:21: Jetzt fehlen mir nur noch die Fachbegriffe für die Quadrate ...und die weißt du, da bin ich mir ganz sicher.

01:28: Lena: Ähmhhh
01:30: Lehrerin: Denk an die Seitenbenennung im rechtwinkligen Dreieck...

01:34: Lena: Ach jaaa Die Flächen der beiden Kathetenquadrate ergeben zusammen die Fläche des Hypotenusenquadrats.

01:42: Lehrerin: Jetzt hast du's perfekt auf den Punkt gebracht, Lena.

01:45: So, ich fasse also nochmal zusammen:

01:47: Wir haben in der letzten Stunde mit Papierquadraten unterschiedlicher Seitenlänge gearbeitet,

01:53: und dabei haben wir herausgefunden, dass die Summe der Flächen der Kathetenquadrate in rechtwinkligen Dreiecken gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates ist,

02:05: und damit haben wir quasi ja schon den Satz des Pythagoras erarbeitet.

02:09: So, heute wollen wir jetzt einen Schritt weitermachen.

02:12: Denn bis jetzt ist es ja nur eine Vermutung, basierend auf unseren Papierquadraten, nicht wahr?

02:17: Das müssen wir schon noch beweisen.

Szene 2: Graphische Erläuterung zum Scherungsbeweis

- 00:05:** Lehrerin: Ok, dann gehen wir mal den Beweis an. Der ist nicht ganz einfach, deswegen haben wir Gruppentische gebildet, damit ihr zusammenarbeiten könnt. Zusätzlich dürft ihr ein kleines Hilfsmittel einsetzen. Wer ein internetfähiges Handy dabei hat holt es bitte mal einfach heraus.
- 00:26:** Lehrerin: Sehr schön. Wie ich sehe ist an jedem Tisch mindestens - ja sogar zwei Handys.
- 00:33:** Lehrerin: Gut. Die App habt ihr ja noch vom letzten Mal. Scannt damit doch bitte alle mal den QR Code ein.
- 00:40:** Lehrerin: Ihr gelangt damit zu einer Homepage, die folgendermaßen aussieht. Die Darstellung zeigt zwei Pythagorasfiguren, wie wir sie ja auch schon mit unseren Papierquadraten zusammengelegt haben.
- 00:51:** Lehrerin: Also erst einmal nichts Neues. Bewegt ihr jetzt aber die weißen Punkte, könnt ihr die Figuren verändern.
- 01:00:** Lehrerin: Probiert es einfach mal vier bis fünf Minuten lang aus und schaut was euch auffällt.
- 01:08:** Lehrerin: Gut. Dann beschreib doch bitte mal was euch aufgefallen ist.
- 01:13:** Lehrerin: Emma.
- 01:14:** Emma: Also, wenn man den linken weißen Punkt verschiebt, dann ändern sich die Größen der Kathetenquadrate.
- 01:21:** Lehrerin: Aha. Max.
- 01:22:** Max: Wie die sich verändern, das hängt zusammen. Wenn das eine kleiner wird, wird das andere größer. Und umgekehrt. Es ist ja auch logisch so.
- 01:28:** Lehrerin: Ok. Ich demonstrier das hier gleich mal.
- 01:31:** Max: Dann haben wir noch das Dreieck selbst. Das verändert sich auch. Die Spitze, also der Eckpunkt C, wandert von links nach rechts und zurück. Dabei bleibt der 90 Grad Winkel aber immer erhalten. Des sieht man auch und außerdem kann man es an dem Thaleskreis begründen. Auf dem wandert nämlich der Punkt C.
- 01:49:** Lehrerin: Ja, sehr gut Max. Ich sehe da ist auch aus der siebten Klasse noch einiges bei dir hängen geblieben. Emma, deine Antwort war auch richtig. Max konnte sie nur noch etwas besser ergänzen. Was ist euch denn noch aufgefallen?
- 02:02:** Emma: Wenn man den Punkt rechts von den zwei Figuren hochzieht, dann werden die rote und grüne Fläche so weit nach oben gezogen, bis sie die Seitenlinien gerade nach oben stehen. Danach werden -
- 02:17:** Lehrerin: Mhm sehr schön. Wer macht von hier aus weiter?

Szene 3: Schülerarbeitsphase zum Scherungsbeweis

- 00:14:** Emily: Wir sind fertig.
- 00:16:** Lehrerin: Zeig mal her.
- 00:21:** Ja, das sieht gut aus, Emily. Sehr gut.
- 00:28:** Zeig mal deins im Vergleich.
- 00:32:** Aber die anderen sind doch noch gar nicht soweit, Emily.
- 00:36:** Emily: Ja, aber es war so einfach und dann hab ich ganz schnell gemacht.
- 00:39:** Was kann ich denn jetzt machen?
- 00:41:** Lehrerin: Emily, du bist mit den Aufgaben gut klargekommen. Aber ihr sollt lernen, euch auszutauschen und gegenseitig zu helfen.
- 00:49:** Überleg dir deswegen doch nochmal wie du auf deine Lösungen gekommen bist und hilf den anderen dabei, auch auf alle Lösungen zu kommen.
- 00:57:** Ihr sollt lernen euch auszutauschen und gegenseitig zu helfen.
- 01:03:** Emily: Ok...also schaut mal her, bei der Aufgabe 2 da war das genau so....

Szene 4: Beweisführung und Hausaufgabenstellung

- 00:00:** Lehrerin: Ich fasse also nochmal zusammen:
- 00:04:** Wir sind von der regulären Pythagoras-Figur gestartet,
- 00:08:** dann durch Scherung zur Teilfigur 2 gelangt,
- 00:12:** für Teilfigur 3 haben wir die Parallelogramme nach unten verschoben,
- 00:15:** und auf dem Weg zu Teilfigur 4 nochmals geschert.
- 00:19:** Nun sind die rote und die grüne Fläche deckungsgleich mit c Quadrat, dem Hypothenusenquadrat.
- 00:25:** Geometrisch haben wir damit gezeigt, dass der Satz des Pythagoras gilt,
- 00:29:** und zwar für jedes rechtwinklige Dreieck.
- 00:32:** Das hat uns auch auf unseren Handys die linke Figur der Visualisierung gezeigt.
- 00:37:** Nun wollen wir zur Übung den letzten Teil des Beweises auch nochmal algebraisch nachvollziehen.
- 00:43:** Wir haben eigentlich alles was wir brauchen dafür schon auf der Folie stehen,
- 00:47:** wir müssten es jetzt nur noch in eine Gleichung zusammenfassen
- 00:49:** Ich geb euch dazu eine kleine Hilfestellung,
- 00:52:** und schreib das Ganze so auf

- 00:56:** a^2 plus b^2 ist, und jetzt kommt unsere erste große Lücke
- 01:03:** mit einem Plus dazwischen
- 01:06:** und die zweite Lücke
- 01:08:** das können wir dann noch vereinfachen
- 01:11:** und das ist dann gleich c^2 .
- 01:16:** mm...Emma, kannst du die Lücke füllen?
- 01:21:** Emma: Also ... a^2 ist ja das Gleiche wie $c \cdot n$
- 01:26:** und b^2 ... $c \cdot m$
- 01:29:** Lehrerin: Ja sehr gut Emma! Sehen das die Anderen auch so?
- 01:34:** Das haben wir auch eigentlich schon grad oben auf der Folie gesehen.
- 01:39:** Wir sind jetzt also in der Algebra angelangt.
- 01:42:** Wir haben hier eine Gleichung stehen und die können wir jetzt noch weiter vereinfachen.
- 01:47:** mmm Ben?
- 01:53:** Ben: ... äh ...äh ... äh... c Quadrat...
- 02:03:** Lehrerin: Nein, das ist so nicht richtig, jetzt schau nochmal genauer hin!
- 02:06:** Wir haben hier eine Summe, kein Produkt.
- 02:10:** Und beide Teile der Summe haben etwas gemeinsam, was denn?
- 02:17:** Ben: ähm, ach so: Ausklammern
- 02:19:** also ähm c mal n plus m ...ähm und n plus m ist ja c, also steht da jetzt c mal c und des ist äh c Quadrat.
- 02:37:** Lehrerin: Na also, geht doch Ben!
- 02:39:** Das Ausklammern, also die Anwendung des Distributivgesetzes ist hier wirklich sehr wichtig!
- 02:47:** Wir haben jetzt eigentlich unseren Beweis vollständig, übertrag das doch bitte noch so auf euer Arbeitsblatt.
- 03:03:** Lehrerin: Als Hausaufgabe für die nächste Stunde habe ich euch ein Arbeitsblatt zum Satz des Pythagoras erstellt.
- 03:09:** Ihr bekommt es hier einmal von mir als Kopie.
- 03:13:** Emily ... würdest du bitte?
- 03:16:** Ich habe es aber auch digital erstellt.
- 03:20:** Ihr seht hier Aufgabe 3.
- 03:24:** Ihr bearbeitet bitte bis zum nächsten Mal Aufgabe 1 bis 3
- 03:27:** und tragt eure Lösungen in das digitale Arbeitsblatt ein.
- 03:31:** Ihr könnt mir auch zu jeder Aufgabe rückmelden, was euch noch unklar ist.
- 03:36:** Hier könnt ihr einmal bewerten wie schwer ihr das Ganze fandet
- 03:39:** und ob ihr konkrete Probleme hattet.
- 03:41:** So können wir beim nächsten Mal gleich besser einschätzen, wo wir nochmal ansetzen müssen.

Szene 5: Visualisierung algebraischer Formeln

- 00:02:** Lehrerin: So, bevor wir heute mit der Hausaufgabenbesprechung beginnen, möchte ich euch noch etwas zeigen. Das bietet sich beim Satz des Pythagoras nämlich super an und wir sollten es auf keinen Fall versäumen.
- 00:12:** Wir haben nämlich am Beweis von letzter Stunde wunderschön sehen können, wie Geometrie und Algebra miteinander verbunden sind und sich gegenseitig ergänzen.
- 00:22:** Und das gilt nicht nur für den Satz des Pythagoras, sondern noch für viel mehr.
- 00:28:** Wir machen jetzt zum Beispiel mal Folgendes: Man lernt ja relativ früh die verschiedensten Formeln zur Flächenberechnung, zum Beispiel zum Rechteck.
- 00:35:** Wer von euch nennt mir denn jetzt mal die Eigenschaften eines Rechtecks? Emma?
- 00:41:** Emma: Das ist ein besonderes Viereck, bei dem alle 4 Winkel, rechte Winkel sind.
- 00:47:** Außerdem sind die beiden gegenüberliegenden Seiten gleichlang.
- 00:51:** Lehrerin: Okay, danke Emma.
- 00:56:** Und mit dieser Definition, wenn ich das deiner Beschreibung nach zeichne, gibts du uns sogar das Quadrat noch mit dazu, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind.
- 01:08:** Emma: Oh, ja stimmt.
- 01:14:** Lehrerin: Und wie ihr wisst, berechnet sich die Fläche eines solchen Rechtecks mit den Seiten a und b zu $a \cdot b$.
- 01:22:** Für das Quadrat erhalten wir dann natürlich a^2 .
- 01:29:** Ich kann also solche Flächenberechnungen nutzen, um Formeln geometrisch zu veranschaulichen.
- 01:37:** Wenn ich jetzt zum Beispiel ein solches Rechteck - so zerschneide, dass ich hier die Seite b , c und a habe, dann ist es doch so, dass diese Fläche hier $a \cdot b$ ist - und diese hier $a \cdot c$.
- 02:00:** Für das gesamte Rechteck erhalte ich dann die Fläche $a \cdot b + a \cdot c$.
- 02:11:** Ich kann die Fläche des gesamten Rechtecks aber auch berechnen, indem ich die gesamte Länge, also b plus c , mit der Breite a multipliziere.
- 02:21:** Also habe ich: $A = a \cdot (b+c)$.
- 02:30:** -Schüler flüstern-
- 02:32:** Was ich hier habe, ist also ganz banal eine Visualisierung des Distributivgesetzes.
- 02:37:** Das hatten wir auch bei unserem Beweis von letzter Stunde mit drin. Schaut ihr euch den noch mal an?
- 02:48:** Ich kann also solche Visualisierungen verwenden, um Formeln geometrisch zu veranschaulichen.
- 02:54:** Ein anderes Bild wäre Folgendes: Ich male ein Quadrat - und zerhacke es mir so, dass ich hier a und hier a habe, und hier b und hier b .
- 03:18:** Wie groß ist jetzt die Fläche hier unten links? Emma?
- 03:24:** Emma: a^2 . Da gibt es doch diese eine Formel mit $a^2 + 2ab + b^2$. Ich glaub, das ist es.
- 03:34:** Max: Das ist die binomische Formel.
- 03:38:** Lehrerin: Ok, sehr gut ihr zwei.

- 03:40:** Was wir hier haben ist also eine Visualisierung der binomischen Formel; genauer gesagt der ersten.
- 03:48:** Diese Fläche hier ist a^2 groß, und diese hier b^2 .
- 03:54:** Diese hier ist $a \cdot b$, und diese hier streng genommen $b \cdot a$.
- 04:00:** Wir haben hier also auch noch das Kommutativgesetz mit drin, weil $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Seht ihr das?
- 04:08:** - Schüler nicken -
- 04:01:** - Schüler flüstern -
- 04:19:** Außerdem haben wir auch die Grundform der Gleichung $(a+b)^2$ super visualisiert.
- 04:30:** Wir haben also beide Formen der Gleichung in einer Skizze vereint.
- 04:36:** Ok, so viel zu unserem kleinen Exkurs. Wie ihr seht: man kann sich vieles aus der Algebra durch geometrische Überlegungen und Visualisierungen deutlich machen.
- 04:46:** Jetzt aber an die Hausaufgaben.

Szene 6: Besprechung der Hausaufgabe

- 00:03:** Lehrerin: Sooo, dann kommen wir jetzt noch zur Nummer 3, da hatten einige von euch ja noch Probleme, wie ich in der App schon gesehen hab.
- 00:14:** Wir machen das jetzt so: Ihr setzt euch da nochmal 5 min ran,
- 00:18:** und diejenigen von euch, die die Aufgabe lösen konnten, also Emily, Max und AUCH Emma, ihr geht mit mir zusammen durch die Klasse und helft den anderen die Aufgaben zu lösen.
- 00:28:** Ich möchte an dieser Stelle auch nochmal betonen was für eine tolle Entwicklung du hingelegt hast, Emma.
- 00:33:** Das konnte man bei deinen Hausaufgaben wieder deutlich sehen. Also weiter so, toll!
- 00:38:** Aber jetzt an die Arbeit ...
- 00:58:** Sarah: Ich find die Aufgabe voll verwirrend irgendwie.
- 01:01:** Lehrerin: Ok, zeig mal was du denn bis jetzt schon hast und herausgefunden hast.
- 01:06:** Ich hab mir erst mal die ganzen rechten Winkel eingezeichnet, so zur Orientierung, das sind ja alles Pythagorasfiguren, insgesamt 5 Stück.
- 01:16:** Also ich weiß schonmal, dass das unterste Quadrat 9 cm^2 groß ist. Wir haben rechtwinklige Dreiecke, also müssen die beiden weißen Quadrate drüber zusammen 9 ergeben.
- 01:28:** Aber da hänge, ich weil ich keine ganzzahligen Seiten finde, die zusammen neun ergeben.
- 01:33:** 1 und 2 nicht, 2 und 2 nicht und mit drei kommt man ja schon voll drüber, das kann gar nicht mehr sein, das ist ja schon die die Seitenzahl von unten.
- 01:41:** Lehrerin: Ok, ich seh schon wo es hakt. Versuch mal ganz von den Zahlen und den angegebenen 3 cm wegzukommen.
- 01:47:** Die brauchst du erst wieder ganz zum Schluss. Hier geht's jetzt erst mal um das grundsätzliche Prinzip des Pythagoras.
- 01:54:** Und die wichtigsten Sachen, die hast du ja gerade schon erkannt, das habe ich gesehen.

- 01:58:** Also, was meinst du, hängen die Figuren zusammen oder sind die unabhängig voneinander?
- 02:05:** Sarah: Die hängen auf jeden Fall zusammen. Das ist ja quasi eine Zeichnung.
- 02:09:** Lehrerin: Genau ... und das ist hier schonmal sehr wichtig.
- 02:13:** Also die beiden weißen ergeben zusammen das große Grüne, das hast du ja gerade schon gesagt.
- 02:19:** Gehen wir also gleich zu den Quadraten, bei denen du Probleme hattest.
- 02:23:** Zuerst links. Was meinst du, wie hängt das Weiße mit den darüber liegenden Grünen in Verbindung?
- 02:30:** Sarah: Die zwei Grünen zusammen ergeben das Weiße.
- 02:34:** Lehrerin: Ja sehr gut, notier dir das doch gleich mal in deine Zeichnung.
- 02:43:** Und jetzt zum rechten weißen Quadrat.
- 02:47:** Sarah: Da ist es auch so, die - das weiße - das große weiße Quadrat ist genauso so groß, wie die zwei weißen darüber.
- 02:57:** Lehrerin: Genau, und jetzt fehlen noch zwei Pythagoras-Figuren, die oben rechts.
- 03:04:** Sarah: Die zwei weißen Figuren sind genauso groß wie die zwei grünen darüber.
- 03:12:** Lehrerin: Ja ganz genau, und jetzt musst du nur noch den Weg von hier rückwärtsgehen und deine Ergebnisse zusammenzutragen.
- 03:19:** Also quasi von den Zweigspitzen zum Stamm unseres Pythagorasbaums.
- 03:24:** Sarah: Hmhmhmhmähhm
- 03:32:** Lehrerin: Ok, nur die Ruhe. Schau dir die Zeichnung nochmal genau an.
- 03:36:** Diese Kathetenquadrate gehören zu diesem Hypotenusenquadrat...
- 03:44:** ... sie sind also gleich groß.
- 03:47:** Wie ist es bei den anderen?
- 03:49:** Sarah: Ähm...Genau gleich.
- 03:52:** Lehrerin: Ok, und wenn du jetzt die darunterliegende Pythagorasfigur anschaust, dann wird das Hypotenusenquadrat von gerade eben auf einmal zum Kathetenquadrat.
- 04:06:** Sarah: Achso!!! ... Das heißt ja, dass das rechte Kathetenquadrat der untersten Pythagorasfigur genauso groß ist, wie die vier grünen Quadrate rechts oben.
- 04:17:** Lehrerin: Und was ist links?
- 04:20:** Sarah: Links ist es genauso. Die, das linke Kathetenquadrat ist genau so groß wie die zwei Grünen drüber.
- 04:27:** Zusammen haben wir dann die Fläche, also die zwei weißen sind zusammen genauso groß wie das große grüne Quadrat. Also insgesamt haben wir die Fläche vom großen grünen Quadrat!
- 04:38:** Lehrerin: Ja, sehr schön, wirklich gut erkannt!
- 04:41:** Jetzt können wir auch wieder unsere Zahlen mit ins Spiel bringen.
- 04:45:** Was meinst du, wie groß sind die grünen Quadrate zusammen?
- 04:50:** Sarah: Insgesamt sind es dann 18 cm^2 , weil das große grüne Quadrat ist ja 9 cm^2 groß, und die anderen zusammen auch 9.

05:01: Lehrerin: Ja, perfekt!

05:03: Und du siehst, dein Problem von gerade eben, hat sich in Luft aufgelöst. Du kannst jetzt Aussagen über alle Figuren machen, ohne ein einzelnes Quadrat berechnen zu können oder zu müssen.

05:13: Also, schließ dich doch jetzt den Anderen an und hilf dem Rest der Klasse, die Aufgaben zu erklären.