

# Transkript des Unterrichtsvideos im Modul

**Lehren und Lernen mit Digitalen Medien**

**Didaktische Prinzipien**

**Sinus, Cosinus und deren Ableitungen**

## Szene 1: Einführung und graphische Ableitung ohne digitale Medien

- 00:05:** Lehrerin: Ja in den nächsten Stunden wollen wir die Ableitungen der Sinus- und Cosinusfunktion erarbeiten.
- 00:12:** Heute beginnen wir mit der grafischen Ableitung der Sinusfunktion. Wir hatten ja in der letzten Stunde darüber kurz gesprochen.
- 00:18:** Aber zunächst noch einmal: Wie sieht denn die Sinusfunktion eigentlich aus? Moritz, was weißt du noch?
- 00:27:** Moritz: Naja, ist halt so ne Welle.
- 00:30:** Okay, so ne Welle. Ja, schön, dass das noch hängen geblieben ist.
- 00:34:** Wenn du das noch ein bisschen gleichförmiger hinbekommst, dann kommen wir der Sache schon näher!
- 00:38:** Aber was muss man denn noch beachten? Wie sieht es denn mit der Wellenhöhe aus? Ja, Sofia?
- 00:43:** Sofia: Ähm die Wellenhöhe war immer gleich nach oben und unten und ähm von - also in der y-Achse fängt sie von -1 äh bis nach +1 läuft sie
- 00:53:** und sie wiederholt sich mit Periode 2 Pi. Ich bin mir jetzt aber nur nicht mehr sicher, ob der Sinus bei der 0 oder 1 anfängt.
- 01:02:** Lehrerin: Ja, das hört sich schon sehr gut an. Wir schauen uns das jetzt gleich mal an der Wand an.
- 01:06:** Ich gebe in das Eingabefeld Sinus von x ein und dann sehen wir hier automatisch schon die Funktion.
- 01:12:** Über die Wertetabelle haben wir schon öfter gesprochen, deswegen lass ich die jetzt einfach automatisch aufbauen. So kommt ein Wert zum anderen dazu.
- 01:22:** Jetzt erinnert ihr euch sicherlich auch wieder an die Cosinusfunktion..... oder, Finn?
- 01:30:** Finn: Der verläuft sehr ähnlich.. Nur, dass er bei 1 anfängt.
- 01:34:** Lehrerin: Genau. Wie der Cosinus aussieht das dürft ihr euch auch nochmal selbst später grafisch anschauen.
- 01:40:** Wir wollen jetzt wieder zurückkommen und uns überlegen wie wir die Ableitung des Sinus grafisch erarbeiten können... Bitte!
- 01:50:** Sofia: Ähm die Ableitung ist die Steigung einer Funktion und die Steigung lesen wir an einer Steigungsgeraden ab.
- 01:57:** Lehrerin: Ja, das ist nicht ganz richtig, aber ich denke du meinst das Richtige.
- 02:01:** Also nochmal: die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle entspricht dem Wert der Tangente - der Steigung der Tangente, die man an dieser Stelle an der Funktion anlegt.
- 02:17:** Auch das zeig ich euch hier mal mit dem Programm.
- 02:20:** Also hier seht ihr die Tangente, die an jedem Punkt des Graphen eine andere Steigung hat.

**02:29:** Wir wollen also den Sinus jetzt grafisch ableiten - und dazu überlegen wir uns mal: Welche Steigungswerte können wir sehr einfach grafisch ermitteln?

**02:43:** Wie ist die Steigung an den Hoch- und Tiefpunkten... Moritz?

**02:48:** Moritz: Hm, ich weiß nicht.

**02:50:** Lehrerin: Okay, kein Problem ich helfe dir. Wie müsste die grüne Gerade liegen, wenn sie an einem Hoch- oder an einem Tiefpunkt ist?

**03:04:** Ich habe doch gerade eben gezeigt, dass die Tangente entlang dieser Sinusfunktion die Funktion nur berühren darf, aber nicht schneiden darf.

**03:15:** Moritz: Ja stimmt! Ähm, ja dann müsste die Gerade horizontal sein!

**03:21:** Ja richtig! Und wenn die Gerade horizontal ist, welche Steigung hat sie dann?

**03:26:** Moritz: Ja, dann ist die Steigung gleich Null.

**03:29:** Lehrerin: Na also! Und welche Steigung hätte sie dann bei drei Halbe Pi? Also beim Tiefpunkt?

**03:38:** Moritz: Na genau so. Also müsste die Steigung da Null sein.

**03:43:** Lehrerin: Ja also! Also haben wir jetzt die Steigung am Hoch- und Tiefpunkt. Was wissen wir noch?

**03:50:** Leah!

**03:53:** Leah: Ähm also die Funktion steigt bis zum Hochpunkt, fällt dann bis zum Tiefpunkt und steigt wieder.

**04:01:** Also müsste die Ableitung im ersten und letzten Abschnitt positiv sein und im mittleren negativ?

**04:09:** Lehrerin: Ja, genau! Also betrachten wir doch mal die Steigung der Tangente vom Tief- bis zum Hochpunkt.

**04:18:** Ihr seht, dass die Tangente hier immer positiv zu sein scheint. Sie steigt hier sehr stark an und wird Richtung Pi-Halbe wieder flacher - und dann ist sie wieder bei Null.

**04:31:** Wo in diesem Abschnitt ist sie jetzt am steilsten?

**04:38:** Ja bitte!

**04:39:** Sofia: Ähm genau in der Mitte. Also in diesem Fall bei Null!

**04:42:** Lehrerin: Mhm und was tippst du welchen Wert hat sie da?

**04:46:** Sofia: Ähm also man kann sich ja ein Steigungsdreieck vorstellen und dann würde man in diesem Fall 1 rüber gehen und 1 hoch und dann wäre die Steigung 1.

**04:58:** Lehrerin: Genau!

## Szene 1: Einführung und graphische Ableitung mittels digitaler Medien

- 00:05:** Lehrerin: Gut mitgedacht! Dass der Sinus bei Null die Ableitung Eins hat, ist gar nicht so leicht zu zeigen!
- 00:12:** Den rechnerischen Beweis werden wir in der nächsten Stunde machen! Aber wie verfahren wir mit den anderen Punkten?
- 00:18:** Hannah?
- 00:20:** Hannah: Bei zwei Pi sieht der Sinus doch genau so aus. Also müsste da die Ableitung auch eins sein.
- 00:25:** Lehrerin: Ja, das hast du richtig erkannt.
- 00:27:** Also so. Und wie sieht's bei Pi aus?
- 00:37:** Moritz?
- 00:39:** Moritz: Ja, wie sieht es denn da aus?
- 00:42:** Andersrum. Ja, andersrum! Aber doch genau so?
- 00:48:** Also der Sinus ist glaube ich symmetrisch.
- 00:51:** Lehrerin: Ja das hört sich gut an. Kannst du das noch genauer erläutern?
- 00:58:** Sofia: Wenn man sich am Hochpunkt des Sinus doch eine senkrechte Achse vorstellen würde, dann wäre das doch die Symmetrieachse, oder?
- 01:04:** Lehrerin: Ja, das ist ein super Ansatz!
- 01:11:** Also hier wäre die Symmetrieachse. Und was hat die jetzt für eine Steigung? Hannah?
- 01:18:** Hannah: Ist das dann -1?
- 01:20:** Lehrerin: Ja, genau! Das heißt wir haben jetzt für einige Stellen die Ableitungsfunktion bestimmt.
- 01:29:** Und ich verrate euch jetzt noch etwas. Diese Funktion kennen wir schon!
- 01:35:** Es fällt jetzt ein bisschen vom Himmel, aber wer erkennt das? Ja, Hannah?
- 01:41:** Hannah: Die Ableitung ist doch wieder der Sinus, nur dass der ein Stück verschoben wurde.
- 01:46:** Lehrerin: Finn!
- 01:47:** Finn: Die Ableitung ist der Cosinus. Also wenn man unsere so eben erhaltenen Werte mit denen der Wertetabelle vom Cosinus vergleicht, stimmen diese überein!
- 01:55:** Lehrerin: Ja, das werden wir gleich mal machen! Wir merken uns die Werte hier von der Ableitungsfunktion
- 02:02:** und schauen uns den Cosinus von x an und lassen die Werte der Sinusableitung stehen.
- 02:11:** Und ihr seht, wir erhalten die gleichen Werte von Ableitung des Sinus und der Cosinusfunktion!
- 02:22:** Wenn wir also den Sinus grafisch ableiten, erhalten wir die Cosinusfunktion!

## Szene 2: Gemeinsame Erarbeitung der graphischen Ableitung – Teil 1

**00:05:** Lehrerin: Das war jetzt schon ganz schön viel Arbeit für eine scheinbar einfache Aussage.

**00:10:** Wir haben also gesehen, dass die Ableitung der Sinusfunktion im Nullpunkt Eins ist.

**00:15:** Habt ihr eine Vermutung, wie die Ableitung bei Pi oder bei zwei Pi sein könnte?

**00:21:** Hannah?

**00:22:** Hannah: Bei zwei Pi sieht der Sinus doch genauso aus. Also müsste da die Ableitung auch Eins sein.

**00:28:** Lehrerin: Ja genau. Also zeichne ich jetzt dort auch mal die Tangente ein. Und wie wird das jetzt bei Pi sein?

**00:49:** Moritz?

**00:51:** Moritz: Ja wie sieht das denn da aus? Andersherum. Ja andersherum. Aber doch genauso?

**00:58:** Lehrerin: Ja gar nicht schlecht.

**00:59:** Moritz: Also der Sinus ist glaube ich symmetrisch.

**01:02:** Lehrerin: Ja. Kannst du's noch genauer erläutern?

**01:10:** Sophia: Wenn man sich am Sinus, am Hochpunkt, eine senkrechte Achse vorstellen würde, dann wäre das doch die Symmetrieachse, oder?

**01:16:** Lehrerin: Ja sehr gut! Das heißt, wenn ich jetzt meine Tangente einzeichne, nach dieser Art von Symmetrie, dann sähe das so aus.

**01:32:** Welchen Wert hat die Ableitung jetzt an dieser Stelle?

**01:37:** Hannah?

**01:38:** Hannah: Ist das dann -1?

**01:39:** Lehrerin: Ja genau. Ganz genau. Wir haben also jetzt an einigen Stellen der Sinusfunktion die Ableitung grafisch bestimmt; hier kommt also noch -1 her; und jetzt verrate ich euch noch etwas. Die Ableitung der Sinusfunktion ist eine Funktion, die ihr bereits kennt.

**01:58:** Das fällt jetzt ein bisschen vom Himmel aber habt ihr 'ne Vermutung?

**02:05:** Hannah?

**02:06:** Hannah: Die Ableitung ist wieder der Sinus, nur, dass der dann verschoben ist.

**02:12:** Lehrerin: Finn?

**02:13:** Finn: Die Ableitung ist der Cosinus. Wenn man uns're soeben erhaltenen Ergebnisse mit der Wertetabelle vom Cosinus vergleicht, dann stimmen diese überein.

**02:20:** Lehrerin: Ja. Ganz genau. Jetzt zeichne ich mal noch ein Koordinatensystem ein.

**02:49:** Wie ist die Steigung an den Hoch- und Tiefpunkten?

**02:56:** Leah?

**02:58:** Leah: An den Punkten ist die Steigung immer Null.

**03:02:** Lehrerin: Ja. Das heißt die Null können wir schon mal hier in die Tabelle eintragen und auch in das Koordinatensystem.

**03:11:** Also bei Pi Halbe Null und bei drei Halbe Pi auch Null.

## Szene 2: Gemeinsame Erarbeitung der graphischen Ableitung – Teil 2

**00:05:** Lehrerin: Was wissen wir noch?

**00:09:** Leah, mach' gleich weiter.

**00:11:** Leah: Ähm also die Funktion steigt bis zum Hochpunkt, fällt dann bis zum Tiefpunkt und steigt dann wieder. Also müsste die Ableitung im ersten und letzten Teil positiv und im mittleren Teil negativ sein.

**00:26:** Lehrerin: Genau und das passt auch ganz gut zu unserer 1 und zu unserer -1.

**00:37:** Hier ist es positiv, hier ist die Steigung negativ und hier ist sie wieder positiv.

**00:48:** Finn, möchtest du noch etwas ergänzen?

**00:49:** Finn: Die Steigung an den x-Werten Null, Pi und zwei Pi ist 1 beziehungsweise -1. Also bei Null und x gleich zwei Pi ist es Eins und x gleich Pi ist es minus Eins.

**01:01:** Lehrerin: Ja, danach wollte ich gerade noch fragen. Gut dann trage ich die Werte mal ein.

**01:15:** So wir haben jetzt also einige Eigenschaften dieser Ableitungsfunktion erarbeitet und jetzt schwinde ich mich mal vage durch diese Kreuze hier durch.

**01:32:** Und stelle jetzt nochmal die Frage an euch, welche Funktion vermutet ihr hier?

**01:39:** Hannah?

**01:40:** Hannah: Das sieht aus wie der Sinus und zwar verschoben um Pi Halbe ... aber das habe ich ja vorhin eigentlich schon gesagt.

**01:47:** Lehrerin: Ja. Schau nochmal ins Heft, ob dir noch was auffällt, wenn du die Cosinusfunktion anschaust.

**01:54:** Hannah: Ahja das sieht aus wie der Cosinus.

**01:59:** Lehrerin: Also wir sind zur Vermutung gekommen, dass die Ableitung des Sinus die Cosinusfunktion ist. Eigentlich müssten wir das jetzt noch rechnerisch nachweisen, aber da schlage ich vor, dass wir den existierenden Beweisen glauben.

**02:13:** Und somit können wir den Tafelanschrieb abschließen mit unserer Erkenntnis, dass die Ableitungsfunktion des Sinus, die um Pi halbe verschobene Sinusfunktion ist oder die Cosinusfunktion.

**02:36:** Eine ähnliche Überlegung könnten wir jetzt auch noch mit der Cosinusfunktion machen, das werden wir aber in der nächsten Stunde mithilfe eines Mathematikprogrammes und den iPads.

## Szene 3: Erarbeitung der Funktionseigenschaften in Zweiergruppen – Teil 1

- 00:05:** Lehrerin: So heute setzen wir zuerst mal um. Der Moritz setzt sich bitte zur Sofia, der Finn zur Hannah und die Leah geht zum Elias.
- 00:17:** So, heute werdet ihr selbstständig Aufgaben zum Sinus und Cosinus bearbeiten.
- 00:21:** Ihr bekommt dafür jeder ein Aufgabenblatt und ihr dürft das Ganze paarweise mit den iPads machen, mit Cinderella, das ihr ja schon kennt.
- 00:32:** Ähm ihr werdet unterschiedlich weit kommen vielleicht, aber das macht nichts!
- 00:36:** Wichtig ist, dass ihr euch heute selbstständig diese Themen erarbeitet und für Fragen stehe ich natürlich jederzeit zu Verfügung!
- 00:49:** Hannah: Ähm wir sollen die Amplitude verdoppeln. Ist das der Abstand zwischen x-Achse und dem Hochpunkt?
- 00:58:** Finn: Ja also wir sollen die Amplitude ja verdoppeln, also ich würde mal tippen, dass wir die 2 irgen - also wir müssen die 2 irgendwo einsetzen.
- 01:04:** Probieren wir mal  $\sin(2x)$ .
- 01:09:** Okay, da kommen jetzt zwar mehr Wellen, aber die ist nicht größer geworden.
- 01:13:** Probieren wir mal  $2\sin(x)$ .
- 01:21:** Hannah: Oh ja, genau das suchen wir. Also ist irgendwie logisch, dass wenn man die Zahl davor vergrößert, dass dann mehr Wellen kommen!
- 01:30:** Finn: Gar nicht so schwer, was! Probieren wir gleich die nächste!
- 01:33:** Okay also wir müssen die Periodizität um 3 stauchen.
- 01:38:** Hannah: Periodizität ?! (liest sich leise die Definition von Periodizität durch)
- 01:50:** Okay also bedeutet das, dass wenn man ähm die Funktion quasi zwischen Null und zwei Pi abschneiden würde und dann bei zwei Pi wieder ankleben würde, oder?
- 01:59:** Also das ist doch die Definition von Periodizität?
- 02:02:** Finn: Äh ok, ja genau, das hatten wir ja vorhin schon! Also ich würde jetzt  $3\sin(x)$  tippen.
- 02:11:** Hannah: Ja ich glaube dann haben wir es, oder?
- 02:13:** Finn: Ja okay, tragen wir es mal ein!
- 02:19:** Moritz: Ah, wir haben eine Gerade durch den Punkt A, was sagt der nochmal über die Dingens... Funktion aus?
- 02:26:** Sofia: Das ist die Tangente im Punkt A, also die Steigung einer Funktion.
- 02:31:** Moritz: Aber in der Tabelle steht, dass wir  $\cos'$  von x eintragen sollen und nicht den Cosinus.
- 02:37:** Sofia: Man, die Steigung ist doch die Ableitung einer Funktion, Moritz! Das haben wir doch letzte Stunde schon besprochen!
- 02:43:** Moritz: Was soll man denn später mit dem ganzen Wellenzeug anfangen? Ich werde das bestimmt nie brauchen!
- 02:47:** Sofia: Verschieb einfach den Punkt A so, dass wir die ganzen Werte ablesen können.

**03:10:** Moritz: Hast du das auch so?

**03:13:** Sofia: Ähmm, ja das stimmt! Jetzt müssen wir nur noch die Aufgabe 5 machen.

**03:20:** Äh wir sollen die Ableitung des Cosinus anhand vom Sinus beschreiben, das verrät uns ja der Tipp.

**03:25:** Moritz: Hm, das verstehe ich jetzt nicht so ganz.

**03:28:** Sofia: Ja die Kurve ist wieder so ähnlich, aber ich weiß nicht genau wie ich dir das mit dem Sinus erklären soll.

**03:33:** Lass uns einfach zum nächsten Teil übergehen.

## Szene 3: Erarbeitung der Funktionseigenschaften in Zweiergruppen – Teil 2

**00:06:** Lehrerin: Na, wie geht's euch mit Aufgabe 5? Wo steckt ihr fest?

**00:14:** Sofia: Ja ich weiß nur nicht genau wie ich das ihm hier erklären soll.

**00:19:** Ja dann schaut euch doch mal die abgeleitete Kurve an. Wisst ihr wie das geht mit dem iPad?

**00:32:** Wenn ich den Sinus eingebe, dann ist die Kurve zu dem Punkt verschoben, den wir eigentlich haben wollen.

**00:39:** Lehrerin: Und welchen wollen wir eigentlich haben?

**00:43:** Sofia: Ähm die Kurve soll bei  $x=0$  durch Null und dann nach unten gehen aber der Sinus geht bei  $\pi$  durch Null und dann nach unten.

**00:52:** Moritz: Ah, dann müssen wir also einfach die Kurve wieder verschieben. Wie beim ersten Blatt.

**00:57:** Also wir wollen den Sinus um dieses Stück verschieben.

**01:02:** Ja und das könnt ihr tun, indem ihr beim  $x$  das  $\pi$  ergänzt. Wisst ihr wie?

**01:20:** Moritz: Ah! Wir haben es!

**01:22:** Lehrerin: Ja ihr habt jetzt die Ableitung des Cosinus durch den Sinus bestimmt, aber ich gebe euch einen Tipp, es geht noch einfacher!

**01:30:** Gebt mal  $-\sin(x)$  ein.

**01:39:** Ja!

**01:40:** Aber das ist ja - ist das eine Ellipse? Das ist ja ein Kreis.

**01:47:** Oh, ja.

**01:49:** Warte, vielleicht...

**01:55:** Mal drei... oder so?

**01:57:** Probieren wir es einfach mal aus!

**02:00:** Oh, was ist das denn?!

**02:04:** Sofia: ...4,5... Ja!



**02:10:** Moritz: Boa, damit gebe ich bei Frau Hipsacker an!

**02:12:** Sofia: Wenn das in der nächsten Schulaufgabe drankommt dann...!

**02:20:** Moritz: Ich wusste nicht, dass sowas geht. Eine liegende Acht.

**02:22:** Sofia: Ich auch nicht!

**02:23:** Moritz: Kann man da jetzt lang fahren? Faszinierend!

**02:34:** Leah: Bei den anderen Aufgaben hatten wir es doch auch schon so, dass wenn wir im ersten Eingabefenster was dazu addieren, der Kreis sich nach rechts verschiebt und im zweiten Eingabefenster nach oben beziehungsweise unten.

**02:47:** Elias: Ja das ist ganz einfach! Also wenn wir im ersten Fenster plus 5 dazu nehmen und beim zweiten 1,5 wegnehmen, dann haben wir einen Sinus von plus 5 und den Cosinus von plus 3!

**02:57:** Dann sollten wir eigentlich "D" erwischen!

**03:06:** Leah: Wunderbar! Lass uns mal versuchen eine Ellipse zu formen.

**03:10:** Elias: Mhm, dann gehen wir am besten wieder zu der Ausgangssituation zurück. Also nehmen wir mal die plus 5 und die plus 3 wieder raus.

**03:18:** Weil dazu addieren verschiebt nur wie wir wissen und deswegen würde ich mal vorschlagen es dazu zu multiplizieren.

**03:24:** Also zum Beispiel den Sinus von  $2x$  oder 2 mal den Sinus von  $x$ .

**03:29:** Leah: Okay! Ich versuche mal Sinus von  $2x$ . Cosinus von  $x$  lassen wir!

**03:35:** Oh okay, so erhalten wir eine 8.

**03:38:** Dann versuch ich mal 2 mal Sinus  $x$ .

**03:47:** Elias: Da haben wir schon eine Ellipse! Jetzt muss sie nur noch ein bisschen größer werden! Lass uns eine drei draus machen!

**03:53:** Leah: Okay!... Wow nur noch eine Aufgabe!